$\cos^2\theta=k^2(x^2+y^2)=1$，

代入（2）式得：$\frac{k^2y^2}{x^2}+\frac{k^2x^2}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}=\frac{10k^2}{3}$，即：$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{10}{3}$.

设 $\frac{x^2}{y^2}=t$，则 $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$，解得：$t=3$ 或 $\frac{1}{3}$ ∴ $\frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}$ 或 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

另解：由 $\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$，将等式（2）两边同时除以 $\frac{\cos^2\theta}{x^2}$，再表示成含 $\tan\theta$ 的式子：$1+\tan^4\theta=(1+\tan^2\theta)\times\frac{10}{3(1+\frac{1}{\tan^2\theta})}=\frac{10}{3}\tan^2\theta$，

设 $\tan^2\theta=t$，则 $3t^2-10t+3=0$，∴ $t=3$ 或 $\frac{1}{3}$，解得 $\frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}$ 或 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

点评：第一种解法由 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$ 而进行等量代换，进行换元，减少了变量的个数. 第二种解法将已知变形为 $\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，不难发现进行结果为 $\tan\theta$，再进行换元和变形.两种解法要求代数变形比较熟练. 在解高次方程时，都使用了换元法使方程次数降低.

例 9. 已知 x，$y\in R$，且 $x^2+y^2\leqslant1$，则 $x+y-xy$ 的最大值为______.

解析：

法 1. 可设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta(0\leqslant r\leqslant1,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$.

当 $r=0$ 时，$x=y=0$，所以 $x+y-xy=0$.

当 $0<r\leqslant1$ 时，得 $x+y-xy=r(\sin\theta+\cos\theta)-r^2\sin\theta\cos\theta$.

可设 $\sin\theta+\cos\theta=t$（$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$），得 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，

所以 $x+y-xy=rt-\frac{r^2}{2}(t^2-1)=\frac{r^2+1}{2}-\frac{r^2}{2}(t-\frac{1}{r})^2\leqslant\frac{r^2+1}{2}\leqslant1$，

当且仅当 $\begin{cases}t=\frac{1}{r},\\ \frac{r^2+1}{2}=1,\end{cases}$ 即 $(x,y)=(1,0)$ 或 $(0,1)$ 时 $(x+y-xy)_{max}=1$.

所以所求最大值为 1.

法 2. 设 $x+y=t$，得 $t^2=x^2+y^2+2xy\leqslant1+2xy$，$xy\geqslant\frac{t^2-1}{2}$，

所以 $x+y-xy\leqslant t-\frac{r^2-1}{2}=1-\frac{(t-1)^2}{2}\leqslant1$.

当且仅当 $(x,y)=(1,0)$ 或 $(0,1)$ 时，$(x+y-xy)_{max}=1$.

例 10. 求函数 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$ 的最大值.

解析：

法 1. 设 $u=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}(u\geqslant2)$，得 $u^2=x+\frac{1}{x}+2$，所以 $y=u-\sqrt{u^2-1}=\frac{1}{u+\sqrt{u^2-1}}(u\geqslant2)$

因为 y 是 u 的减函数，所以可得当且仅当 $u=2$ 即 $x=1$ 时，$y_{max}=2-\sqrt{3}$.

法 2. 设 $z=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$.

两次使用均值不等式，可得 $z\geqslant2+\sqrt{3}$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）.

又 $yz=1$，得 $y\leqslant\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，所以当且仅当 $x=1$ 时，$y_{max}=2-\sqrt{3}$.

点评：有时用换元法（包括三角换元、构造对偶式等等）也可简洁求解某些最值（取值范围）问题.

例 11. 实数 x、y 满足 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$，若 $x+y-k>0$ 恒成立，求 k 的范围.

解析：由 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$，设 $\frac{x-1}{3}=\cos\theta$，$\frac{y+1}{4}=\sin\theta$，

即：$\begin{cases}x=1+3\cos\theta,\\ y=-1+4\sin\theta\end{cases}$ 代入不等式 $x+y-k>0$ 得：$3\cos\theta+4\sin\theta-k>0$，

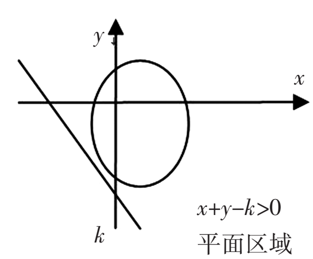
即 $k<3\cos\theta+4\sin\theta=5\sin(\theta+\psi)$.

所以 $k<-5$ 时不等式恒成立.

点评：由已知条件 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$，可以发现它与 $a^2+b^2=1$ 有相似之处，于是实施三角换元.

本题进行三角换元，将代数问题（或者是解析几何问题）化为了含参三角不等式恒成立的问题，再运用“分离参数法”转化为三角函数的值域问题，从而求出参数范围.一般地，在遇到与圆、椭圆、双曲线的方程相似的代数式时，或者在解决圆、椭圆、双曲线等有关问题时，经常使用“三角换元法”.

本题另一种解题思路是使用数形结合法的思想方法：在平面直角坐标系，不等式 $ax+by+c>0$ $(a>0)$ 所表示的区域为直线 $ax+by+c=0$ 所分平面成两部分中含 x 轴正方向的一部分. 此题不等式恒成立问题化为图形问题：椭圆上的点始终位于平面上 $x+y-k>0$ 的区域. 即当直线 $x+y-k=0$ 在与椭圆下部相切的切线之下时.当直线与椭圆相切时，



$x+y-k>0$
平面区域

方程组 $\begin{cases}16(x-1)^2+9(y+1)^2=0,\\ x+y-k=0\end{cases}$ 有相等的一组实数解，消元后由△=0 可求得 $k=-3$，所以 $k<-3$ 时原不等式恒成立.

题组练习：

1. $y=\sin x\cdot\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值是______.

2. 设 $f(x^2+1)=\log_a(4-x^4)(a>1)$，则 $f(x)$ 的值域是______.

（下转第 11 页）